THREE YEAR B.A./B.Sc. DEGREE EXAMINATION — MARCH/APRIL 2019

CHOICE BASED CREDIT SYSTEM

FOURTH SEMESTER

Part – II : Mathematics

Paper I — REAL ANALYSIS

(*w.e.f.* 2016-2017)

Time : 3 hours

Max. Marks : 75

PART – A

పార్ట్ – ఎ

Answer any FIVE of the following questions.

Each question carries 5 marks.

ఏవైనా ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానము వ్రాయుము.

ప్రతి ప్రశ్నకు 5 మార్కులు.

(Marks : 5 × 5 = 25)

1. Test the convergence of the sequence $S_n = \dfrac{n^2}{n+1}$.

   $S_n = \dfrac{n^2}{n+1}$ అనుక్రమము యొక్క అభిసరణతను పరీక్షించండి.

2. Find the limit of the sequence $S_n = \dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$.

   $S_n = \dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$ అనుక్రమము యొక్క అవధులను కనుగొనుము.

3. Test the convergence $\sum\sqrt{\dfrac{3^n-1}{2^n-1}}$.

   $\sum\sqrt{\dfrac{3^n-1}{2^n-1}}$ యొక్క అభిసరణతను పరీక్షించండి.

[P.T.O.]

4. Test the convergence $\sum \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}$.

$\sum \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}$ యొక్క అభిసరణతను పరీక్షించండి.

5. Define a bounded function and give an example of a bounded function.

పరిబద్ధత ప్రమేయాన్ని నిర్వచించి పరిబద్ధత ప్రమేయానికి ఒక ఉదాహరణ ఇవ్వండి.

6. Show that $f(x)=|x|+|x-1|$ is not derivable at $x=0$ and $x=1$.

$f(x)=|x|+|x-1|$ ప్రమేయము $x=0$ మరియు $x=1$ వద్ద అవకలనీయం కాదని చూపండి.

7. Discuss the applicability of Rolle's theorem for $f(x)=x^3-6x^2+11x-6;\quad a=1,\ b=3$.

$f(x)=x^3-6x^2+11x-6;\quad a=1,\ b=3$ ప్రమేయం వద్ద రోలె సిద్ధాంత ప్రయోగాన్ని విచారించండి.

8. If $f(x)=x^2$ on $[0,1]$ and $P=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},1\right\}$. Compute $U(p,f)$.

$[0,1]$ మీద $f(x)=x^2$ ప్రమేయానికి ఒక విభజన $P=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},1\right\}$ అయితే $U(p,f)$ కనుక్కోండి.

PART – B

పార్ట్ – బి

Answer ALL questions.

Each question carries 10 marks.

అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

ప్రతి ప్రశ్నకు 10 మార్కులు.

(Marks : 5 × 10 = 50)

9. (a) Define Cauchy sequence and show directly from the definition that

(i) $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$

(ii) $n+\frac{(-1)^n}{n}$

are Cauchy sequence (or) not.

కోషి అనుక్రమమును నిర్వచింపుము. ఈ నిర్వచనం నుండి :

(i) $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$

(ii) $n+\frac{(-1)^n}{n}$

కోషి అనుక్రమాలా కాదా అని చూపుము.

Or

(b) State and prove Bolzano-Weierstrass theorem for sequences.

బోల్జానో–వియర్‌స్ట్రాస్ సిద్ధాంతాన్ని అనుక్రమాలకు ప్రవచించి నిరూపించుము.

10. (a) Test the convergence of the series $\sum\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)x^n,\ x>0.$

$\sum\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)x^n,\ x>0$ శ్రేణి అభిసరణతని పరీక్షించండి.

Or

(b) State and prove Leibnitz test for alternating series.

ఏకాంతర శ్రేణికి లీబ్నిట్జ్ పరీక్ష ప్రవచించి నిరూపించుము.

11. (a) If $f(x)$ is continuous on $[a,b]$ then prove that $f(x)$ is uniformly continuous on $[a,b]$.

$[a,b]$ మీద f ప్రమేయము అవిచ్ఛిన్నమయితే, అప్పుడు అది $[a,b]$ మీద ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నమని నిరూపించండి.

Or

(b) Prove that the function defined by

$$f(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{if } x\neq 0$$
$$= 0 \quad \text{if } x=0$$

is continuous at $x=0$.

$$f(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{if } x\neq 0$$
$$= 0 \quad \text{if } x=0$$

ప్రమేయము $x=0$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం అని నిరూపించండి.

12. (a) State and prove Cauchy's mean value theorem.

కోషి మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించండి.

Or

(b) If $a < b < 1$, prove that $\frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}} < \left(\sin^{-1} b - \sin^{-1} a\right) < \frac{b-1}{\sqrt{1-b^2}}$, deduce that $\frac{\pi}{6} + \frac{1}{5\sqrt{3}} < \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) < \frac{\pi}{6} + \frac{1}{8}$.

$a < b < 1$ అయితే $\frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}} < \left(\sin^{-1} b - \sin^{-1} a\right) < \frac{b-1}{\sqrt{1-b^2}}$ అని నిరూపించండి తద్వారా $\frac{\pi}{6} + \frac{1}{5\sqrt{3}} < \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) < \frac{\pi}{6} + \frac{1}{8}$ అని చూపండి.

13. (a) State and prove fundamental theorem of integral calculus.

సమాకలన మూల సిద్ధాంతమును ప్రవచించి నిరూపించండి.

Or

(b) Prove that $f(x) = \sin x$ is integrable on $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ and $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1$.

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ మీద $f(x) = \sin x$ సమాకలనీయమనీ మరియు $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1$ అని చూపండి.

[Total No. of Pages : 3

THREE YEAR B.A./B.Sc. DEGREE EXAMINATION,
OCTOBER - 2022
CHOICE BASED CREDIT SYSTEM
FOURTH SEMESTER
PART - II - MATHEMATICS
Paper : IV : REAL ANALYSIS

(Under CBCS New Regulation w.e.f. the academic Year 2021-22)

Time : 3 Hours

Max. Marks : 75

SECTION - A
విభాగము - ఎ

(5×5=25)

Answer any **Five** of the follwoing questions.

1. Prove that a sequence can have at most one limit.

   ఒక అనుక్రమానికి మహా అయితే, ఒక అవధి వుండును, అని నిరూపించండి.

2. Let (x_n) be a sequence defined by $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ and $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1})$ for n>2. Then prove that (x_n) is convergent.

   (x_n) అనుక్రమాన్ని $x_1 = 2, x_2 = 2$ మరియు n>2 కు $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1})$ గా నిర్వచిస్తే (x_n) అభిసరిస్తుంది అని నిరూపించండి.

3. Test the convergence of the series $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

   $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ శ్రేణి అభిసరణతను పరీక్షించండి.

4. If $\sum a_n, a_n > 0$ is convergent, then prove that $\sum \sqrt{a_n}$ is also convergent.

   $\sum a_n, a_n > 0$ అభిసరిస్తే, $\sum \sqrt{a_n}$ కూడా అభిసరిస్తుంది, అని నిరూపించండి.

5. Show that $f(x)=x^2$ is uniformly continuous on [a,b].

$f(x)=x^2$, [a,b] పై ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం అని చూపండి.

6. If f is continuous on [a,b], then prove that f is bounded on [a,b].

f, [a,b] పై అవిచ్ఛిన్నం అయితే, f పరిబద్ధం అని చూపండి.

7. If f is differential on an interval I and $f'(x)\geq 0$ for all $x\in I$, then prove that f is increasing on I.

అంతరం I పై f అవకలనీయం మరియు ప్రతి $x\in I$ కు $f'(x)\geq 0$ అయితే, f ఆరోహణం అని నిరూపించండి.

8. Show that, every constant function is Riemann integrable on [a,b].

ప్రతి స్థిర ప్రమేయం [a,b] పై రీమాన్ సమాకాలనీయం అని చూపండి.

SECTION - B

విభాగము - బి

Answer All questions. **(5×10=50)**

9. a) Prove that $\lim_{n\to\infty} n^{1/n}=1$.

$\lim_{n\to\infty} n^{1/n}=1$ అని నిరూపించండి.

(OR/లేదా)

b) State and prove Bolzano - Weierstrass theorem for sequences.

అనుక్రమాల బోల్జానో వెయిర్‌స్ట్రాస్ సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి, నిరూపించండి.

10. a) Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ converges when p>1.

p>1 అయినపుడు, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ శ్రేణి అభిసరిస్తుంది, అని చూపండి.

(OR/లేదా)

b) State and prove Integral test for series.

శ్రేణుల సమకాలన పరీక్షను ప్రవచించి, నిరూపించండి.

11. a) Let f be a continuous function on [a,b] such that $f(a)f(b)<0$. Then prove that there exist $c \in (a,b)$ such that f(c) = 0.

f అనేది [a,b] పై అవిచ్ఛిన్నం మరియు $f(a)f(b)<0$ అనుకొనుము. ఒక $c \in (a,b)$ అనేది $f(c)=0$ అయ్యే విధంగా వ్యవస్థితం అని నిరూపించండి.

(OR/లేదా)

b) If f is a real valued continuous function defined on [a,b], then prove that f is uniformly continuous on [a,b].

వాస్తవ మూల్య ప్రమేయం f, [a,b] పై అవిచ్ఛిన్నం అయితే, అపుడు f ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం అని నిరూపించండి.

12. a) Let $g: I \to R$ and $f: J \to R$ be functions such that $f(J)$ is a subset of I, and $\in J$. If f is differentiable at c, and if g is differentiable at $f(c)$, then prove that the composite function gof is differentiable at c and $(gof)'(c) = g'(f(c))f'(c)$.

$g: I \to R$ మరియు $f: J \to R$లు f(J), I కి ఉపసమితి మరియు $c \in J$ అయ్యేవిధంగా రెండు ప్రమేయాలు అనుకొనుము. f, c వద్ద అవకలనీయం మరియు g, f(c) వద్ద అవకలనీయం అయితే సంయుక్త ప్రమేయం gof, c వద్ద అవకలనీయం మరియు $(gof)'(c) = g'(f(c))f'(c)$ అని నిరూపించండి.

(OR/లేదా)

b) State and prove Roll's theorem.

రోల్ సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి, నిరూపించండి.

13. a) State and prove first fundamental theorem of calculus.

మొదటి కలన గణిత సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి, నిరూపించండి.

(OR/లేదా)

b) Suppose that f and g two functions in R[a,b]. Then prove that, if $f(x) \le g(x)$ for all $x \in [a,b]$, then $\int_a^b f \le \int_a^b g$.

f మరియు g లు, R[a,b] లో రెండు ప్రమేయాలు అనుకొనుము. ప్రతి $x \in [a,b]$ కి $f(x) \le g(x)$ అయితే $\int_a^b f \le \int_a^b g$ అని నిరూపించండి.

S. Madhuri

THREE YEAR B.A/B.Sc DEGREE EXAMINATION NOVEMBER/DECEMBER 2020

CHOICE BASED CREDIT SYSTEM

FOURTH SEMESTER

Part II — Mathematics

Paper I — REAL ANALYSIS

(w.e.f. 2016-2017)

Time : 3 hours Max. Marks : 75

SECTION – A

సెక్షన్ – ఎ

Answer any FIVE of the following questions. Each question carries 5 marks.

ఏవైనా ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము. ప్రతి ప్రశ్నకు 5 మార్కులు.

(Marks : 5 × 5 = 25)

1. Prove that every convergent sequence is bounded. Is converse true? Give an example.

   ప్రతి అభిసరణ అనుక్రమము పరిబద్ధం అని చూపండి మరియు దాని విపర్యయం నిజమా ఉదాహరణను ఇవ్వుము.

2. If $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n}$ then prove that $\{S_n\}$ is convergent.

   $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n}$ అయితే అనుక్రమమం $\{S_n\}$ అనుసరిస్తుందని చూపండి.

3. Test for convergences of $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^n}$.

   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^n}$ యొక్క అభిసరణతను పరీక్షించండి.

4. Test for convergence $\Sigma\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{3/2}}$.

   $\Sigma\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{3/2}}$ యొక్క అభిసరణతను పరీక్షించండి.

[P.T.O.]

Show that $f(x) = x^2$ is uniformly continuous on $[-a, a]$ where a is any real number.

ఏదేని వాస్తవ సంఖ్య a కి, $[-a, a]$ అంతరముపై $f(x) = x^2$ ప్రమేయము ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నమని చూపండి.

Show that every differentiable function defined on $[a, b]$ is continuous.

$[a, b]$ లో నిర్వచింపబడిన ప్రతి అవకలనీయ ప్రమేయము అవిచ్ఛిన్నం అవుతుందని నిరూపించండి.

Show that $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x \forall x > 0$.

$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x \forall x > 0$ అని నిరూపించండి

If $f(x) = \sin x$ on $[0, \pi]$ and $P = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}$ then compute $L(p, f)$ and $U(p, f)$.

$[0, \pi]$మీద $f(x) = \sin x$ ప్రమేయానికి $P = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}$ విభజన అయితే $L(p, f)$మరియు $U(p, f)$లను కనుగొనండి.

SECTION – B

సెక్షన్ – బి

Answer ALL questions. Each question carries 10 marks.

అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము. ప్రతి ప్రశ్నకు 10 మార్కులు.

(Marks : 5 × 10 = 50)

(a) Prove that the sequence $\{S_n\}$ defined by $S_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ is convergent.

$S_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ అయితే అనుక్రమము $\{S_n\}$ అభిసరిస్తుందని నిరూపించండి.

Or

(b) State and prove Cauchy general principle of convergence.

అభిసరణ యొక్క కోషీ సార్వత్రిక సూత్రంను ప్రవచించి నిరూపించండి

10. (a) State and prove D'Alembert's Ratio test.

D'Alemberts' నిష్పత్తి పరీక్షను ప్రవచించి నిరూపించండి.

Or

(b) Prove that an absolutely convergent series is convergent.

సంపూర్ణాభిసరణం ఎల్లప్పుడు అభిసరిస్తుందని నిరూపించండి.

11. (a) Examine the continuity of $f(x) = |x| + |x-1|$ at the points $x = 0, 1$.

$f(x) = |x| + |x-1|$ అను ప్రమేయపు అవిచ్ఛిన్నతను $x = 0,1$ ల వద్ద చర్చించండి.

Or

(b) If $f(x)$ is cont on $[a, b]$ and $f(a) \neq f(b)$ then prove that $f(x)$ takes every value between $f(a), f(b)$ atleast once.

$f(x)$ అనేది [a,b] లో అవిచ్ఛిన్నము $f(a) \neq f(b)$ అయితే $f(x)$ అనేది $f(a)$, $f(b)$ ల మధ్య గల ప్రతి విలువను కనీసం ఒక్కసారైనా తీసుకుంటుందని చూపండి

12. (a) State and prove Rolle's theorem.

రోల్స్ సిద్ధాంతమును ప్రవచించి నిరూపించండి

Or

(b) Verify Cauchy mean value theorem for $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ in $[a, b]$ where $0 < a < b$.

[a,b] లో $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $0 < a < b$ నకు కోషీ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతమును సరిచూడండి

13. (a) Obtain a necessary and sufficient condition for Riemann Intergrability.

రీమాన్ సమాకలనీయతకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమాన్ని రాబట్టండి

Or

(b) Prove that $f(x) = x^2$ is Riemann Integrable on $[0, a]$ and prove that $\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$.

$f(x) = x^2, [0, a]$పైన రీమాన్ సమాకలనీయము అని చూపండి మరియు $\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$ అని చూపండి

9859538

THREE YEAR B.A./B.Sc. DEGREE EXAMINATION, SEPTEMBER/OCTOBER -2021

CHOICE BASED CREDIT SYSTEM

FOURTH SEMESTER

PART - II : MATHEMATICS

Paper - I : REAL ANALYSIS

(w.e.f. 2016-17)

Time : 3 Hours **Max. Marks : 75**

Part - A

పార్ట్ – ఎ

Answer any **five**. Each question carries **5** marks. (5×5=25)

ఏదైనా ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానము వ్రాయుము. ప్రతి ప్రశ్నకు 5 మార్కులు.

1. If $S_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ then prove that Lt $S_n = 0$. (5)

   $S_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ అయిన Lt $S_n = 0$ అనిచూపుము.

2. Test the convergence of $1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \ldots$ (5)

   $1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \ldots$ అభిసరణను పరిశీలించుము.

3. Test the convergence of the sequence $S_n = \frac{n^2}{n+1}$. (5)

   $S_n = \frac{n^2}{n+1}$ అనుక్రమానికి అభిసరణను పరిశీలించుము.

4. Test the convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3^n}$. (5)

   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3^n}$ అభిసరణను పరిశీలించుము.

5. Define a bounded function and give an example of a bounded function. (5)

పరిబద్ధ ప్రమేయాన్ని నిర్వచించి పరిబద్ధ ప్రమేయానికి ఒక ఉదాహరణ ఇవ్వండి.

6. Show that $f(x)=|x-1|$ is not differentiable at x = 1. (5)

$f(x)=|x-1|$ ప్రమేయము x = 1 వద్ద అవకలనీయము కాదని చూపండి.

7. Find 'C' of a cauchy's mean value theorem for $f(x)=\sqrt{x}$ and $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ in [a,b], where 0<a<b. (5)

$f(x)=\sqrt{x}$ మరియు $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ in [a,b] ఇచ్చుట 0<a<b అయిన కోషీ మాధ్యమ విలువల సిద్ధాంతం ఉపయోగించి 'C' విలువను కనుగొనుము.

8. If $f(x)=x^2$ on [0,1] and $p=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},1\right\}$ compute U(p,f). (5)

$f(x)=x^2$ మరియు $p=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},1\right\}$ ఇచ్చిన ప్రమేయాన్ని [0,1] పై తీసుకొనిన U(p,f) ను కనుగొనుము.

Part - B

పార్ట్ – బి

Answer all questions. Each question carries **10** marks. **(5×10=50)**

అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము. ప్రతి ప్రశ్నకు 10 మార్కులు.

9. a. Suppose $\{S_n\}$ is a monotonic sequence. Prove that $\{S_n\}$ is convergent if and only if it is bounded. (10)

$\{S_n\}$ ఒక ఏకార్థిష్ఠ అనుక్రమము అనుకుందాం $\{S_n\}$ అభిసరణం కావడానికి అది పరిబద్ధం కావడం ఆవశ్యకము మరియు పర్యాప్తం అని చూపండి.

(OR) (లేదా)

b. State and prove Bolzano - Weierstrass theorem for sequence. (10)

బొల్జానో – వియర్‌స్ట్రాస్ సిద్ధాంతాన్ని అనుక్రమాలకు ప్రవచించి నిరూపించుము.

10. a. State and prove Cauchy's n^{th} root test. (10)

కోషీ n –వ మూల పరీక్షను నిర్వచించి నిరూపించుము.

(OR) (లేదా)

b. Test the convergence of the series $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\cos n}$. **(10)**

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\cos n}$ శ్రేణి యొక్క అభిసరణను పరీక్షించండి.

11. a. If $f:[a,b]\to R$ is continuous on [a,b] then f is bounded on [a,b]. **(10)**

$f:[a,b]\to R$ ప్రమేయం [a,b] లో అవిచ్ఛిన్నమైతే [a,b] లో f పరిబద్ధం.

(OR) (లేదా)

b. Prove that the function defined by $f(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) if\ x\neq 0$ is continuous at $x=0$.

$= 0 \qquad if\ x=0$

(10)

పై ప్రమేయం $x=0$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం అని నిరూపించండి.

12. a. State and prove Rolle's Theorem. **(10)**

రోలే సిద్ధాంతంను నిర్వచించి నిరూపించుము.

(OR) (లేదా)

b. Show that $\frac{v-u}{1+v^2}<Tan^{-1}v-Tan^{-1}u<\frac{v-u}{1+u^2}$ for $0<u<v$. Hence deduce that $\frac{\pi}{4}+\frac{3}{25}<Tan^{-1}\frac{4}{3}<\frac{\pi}{4}+\frac{1}{6}$. **(10)**

$\frac{v-u}{1+v^2}<Tan^{-1}v-Tan^{-1}u<\frac{v-u}{1+u^2}$, $0<u<v$ నిరూపించండి తద్వారా $\frac{\pi}{4}+\frac{3}{25}<Tan^{-1}\frac{4}{3}<\frac{\pi}{4}+\frac{1}{6}$ నిరూపించుము.

13. a. Show that f(x) = 3x+1 is integrable on [1,2] and $\int_1^2(3x+1)dx=\frac{11}{2}$. **(10)**

f(x) = 3x+1 ప్రమేయం [1,2] అంతరం మీద సమాకలనీయం అని చూపి $\int_1^2(3x+1)dx=\frac{11}{2}$ అని నిరూపించండి.

(OR) (లేదా)

b. State and prove fundamental theorem of Integral calculus. **(10)**

సమాకలన మూల సిద్ధాంతమును ప్రవచించి నిరూపించండి.

THREE YEAR B.A./B.Sc. DEGREE EXAMINATION — APRIL/MAY 2018

CHOICE BASED CREDIT SYSTEM

FOURTH SEMESTER

Part II – Mathematics

Paper I — REAL ANALYSIS

(w.e.f. 2016-2017)

Time : 3 hours

Max. Marks : 75

PART - A

Answer any FIVE of the following.

ఏవైనా ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

(Marks : 5 × 5 = 25)

1. Prove that the sequence $\{S_n\}$ defined by $S_n = 1 + \frac{1}{\angle 1} + \frac{1}{\angle 2} + \cdots + \frac{1}{\angle n}$ is convergent. (5)

   $\{S_n\}$ అనుక్రమాన్ని $S_n = 1 + \frac{1}{\angle 1} + \frac{1}{\angle 2} + \cdots + \frac{1}{\angle n}$ గా నిర్వచిస్తే ఇది అభిసరిస్తుందని చూపండి.

2. If $\{S_n\}$ is a Cauchy sequence then show that $\{S_n\}$ is convergent. (5)

   $\{S_n\}$ అనునది కోషీ అనుక్రమము అయితే $\{S_n\}$ అభిసరిస్తుందని చూపండి.

3. Test for convergence $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^n}$. (5)

   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^n}$ యొక్క అభిసరణను పరిశీలించండి.

4. Solve and prove Leibnitz test for alternating series. (5)

   ఏకాంతర శ్రేణులకు లెబ్నిజ్ పరీక్షను నిర్వచించి నిరూపించండి.

5. Examine the continuity of $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ for $x \neq 0$ and $f(x) = 1$ for $x = 0$ at $x = 0$. (5)

   $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ $x \neq 0$ మరియు $f(x) = 1$ అగునట్లు $x = 0$ at $x = 0$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నాన్ని పరిశీలించండి.

[P.T.O.]

If a function f is continuous on $[a, b]$ then show that it is uniformly continuous on $[a, b]$. (5)

$[a, b]$ లో f అనుప్రమేయము అవిచ్ఛిన్నమయితే అది $[a, b]$ లో ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నము అవుతుందని చూపండి.

If $f : [a, b] \to R$ is derivable at $c \in [a, b]$ then show that f is continuous at c.

$f : [a, b] \to R$ అనునది $c \in [a, b]$ వద్ద అవకలనమయితే c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నము అవుతుందని చూపండి. (5)

Show that $f(x) = |x| + |x-1|$ is not derivable at $x = 0$ and $x = 1$.

$f(x) = |x| + |x-1|$ అనునది $x = 0$ మరియు $x = 1$ వద్ద అవకలము కాదు అని చూపండి. (5)

If $f \in R[a, b]$ and m, M are Infimum and Supremum of f on $[a, b]$ then show that $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le n(b-a)$.

$f \in R[a, b]$ మరియు m, M యొక్క $[a, b]$ లో అల్పిష్ఠ, గరిష్ఠాలయితే $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le n(b-a)$ అనిచూపండి. (5)

10. If $f(x) = x^2$ on $[0, 1]$ and $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1\right\}$. Compute $L(P, f)$ and $L(P, f)$.

$f(x) = x^2$ అనునది $[0, 1]$ లో అయితే మరియు $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ అయితే $L(P, f)$ మరియు $L(P, f)$ లను కనుక్కోండి.

PART - B

Answer ALL questions, each question carries 10 marks.

అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము. ప్రతి ప్రశ్నకు మార్కులు సమానము.

(Marks : 5 × 10 = 50)

11. Show that a monotonic sequence $\{S_n\}$ is convergent iff it is bounded. (10)

ఏకదిష్ట అనుక్రమము $\{S_n\}$ అభిసరించడానికి, అది పరిబద్ధము అనునది అవశ్యక, పర్యాప్త నియమము అని చూపండి.

Or

12. Prove that the sequence $\{S_n\}$ defined by $S_1 = \sqrt{C} > 0$, $S_{n+1} = \sqrt{C + S_n}$, $\forall n \in Z^+$ converges to the positive root of $x^2 - x - C = 0$. (10)

$S_1 = \sqrt{C} > 0$, $S_{n+1} = \sqrt{C + S_n}$, $\forall n \in Z^+$ అగునట్లు $\{S_n\}$ అనుక్రమము $x^2 - x - C = 0$ యొక్క ధనమూలానికి అభిసరిస్తుందని చూపండి.

13. Examine the convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ when $p > 1$ and $p \leq 1$. (10)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ అనుశ్రేణి యొక్క అభిసరణను $p > 1$ మరియు $p \leq 1$ అయినపుడు అభిసరణను చర్చించండి.

Or

14. State D'Alembert's ratio test, and test for convergence $2x + \frac{3x^2}{8} + \frac{4x^3}{27} + \cdots (x > 0)$. (10)

D' అలంబర్ట్ నిష్పత్తి పరీక్షను నిర్వచించి, $2x + \frac{3x^2}{8} + \frac{4x^3}{27} + \cdots (x > 0)$ శ్రేణి యొక్క అభిసరణను పరిశీలించండి.

15. If f is continuous on $[a, b]$ and $f(a)$, $f(b)$ have opposite signs then show that $\exists\, c \in (a, b)$, such that $f(c) = 0$. (10)

f అనుప్రమేయము $[a, b]$ లో అవిచ్ఛిన్నము మరియు $f(a)$, $f(b)$ లకు వ్యతిరేక గుర్తులుంటే $\exists\, c \in (a, b)$ అయితే $f(c) = 0$ అని రుజూరు చేయండి.

Or

16. Let $f : R \to R$ be such that $f(x) = \frac{\sin(a+1)x + \sin x}{x}$ for $x < 0$, $f(x) = c$ for $x = 0$ and $f(x) = \frac{(x + bx^2)^{1/2} - x^{1/2}}{bx^{3/2}}$ for $x > 0$. Determine the values of a, b, c for which the function is continuous at $x = 0$. (10)

$f : R \to R$ ను $f(x) = \frac{\sin(a+1)x + \sin x}{x}$ $x < 0$, $f(x) = c$ $x = 0$ మరియు $f(x) = \frac{(x + bx^2)^{1/2} - x^{1/2}}{bx^{3/2}}$ $x > 0$ అగునట్లు $x = 0$ వద్ద ప్రమేయము అవిచ్ఛిన్నము అయితే a, b, c $x = 0$ విలువలు కనుక్కోండి.

17. Prove that $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{15} < \sinh^{-1} 0.6 < \frac{\pi}{6} + \frac{1}{8}$. (10)

$\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{15} < \sinh^{-1} 0.6 < \frac{\pi}{6} + \frac{1}{8}$ నిరూపించండి.

Or

(10)

18. State and prove Taylor's theorem with Cauchy form of remainder.

కోషీ అవశేషాన్ని కల్గిన టేలర్ సిద్ధాంతాన్ని నిర్వచించి నిరూపించండి.

(10

19. Show that $f(x) = 3x + 1$ is integrable on $[1, 2]$ and $\int_1^2 (3x+1)\,dx = \frac{11}{2}$.

$f(x) = 3x + 1$ అనునది $[1, 2]$ లో సమాకలనము అవుతుంది అనిచూపండి మరియు $\int_1^2 (3x+1)\,dx = \frac{11}{2}$

అని చూపండి.

Or

(1

20. State and prove fundamental theorem of Riemann integration.

రీమాన్ సమాకలనము యొక్క మూలసిద్ధాంతాన్ని నిర్వచించి నిరూపించండి.

[Total No. of Pages : 4

THREE YEAR B.A./B.Sc DEGREE EXAMINATION MAY-2017

CHOICE BASED CREDIT SYSTEM

FOURTH SEMESTER

PART - II : MATHEMATICS

PAPER - I : REAL ANALYSIS

(w.e.f. 2016-17)

Time : 3 Hours Max. Marks :75

Part - A

విభాగము - A

(5 × 5 = 25)

Answer any **Five** of the following.

క్రింది వాటిలో ఏవైన ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానాలు ఇవ్వుము. ఒక్కొక్క ప్రశ్నకు ఐదు మార్కులు.

1. Test the convergence of the sequence $S_n = \frac{2n^2+3}{n^2+1}$.

   $S_n = \frac{2n^2+3}{n^2+1}$ యొక్క అభిసరణతను పరీక్షించండి.

2. Define a monotone sequence and give an example.

   ఏకదిష్ట అనుక్రమంను నిర్వచించి ఒక ఉదాహరణ ఇవ్వండి.

3. Test the convergence $\sum \frac{2n^3+5}{4n^5+1}$.

   $\sum \frac{2n^3+5}{4n^5+1}$ యొక్క అభిసరణతను పరీక్షించండి.

4. Test the convergence $\sum \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{-n^3}{2}}$.

   $\sum \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{-n^3}{2}}$ యొక్క అభిసరణతను పరీక్షించండి.

[P.T.O.

5. Define continuity of a function and determine the points of continuity of $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}(x\in\mathbb{R})$.

ప్రమేయం యొక్క అవిచ్ఛిన్నతను నిర్వచింపుము .మరియు $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$ కు $(x\in\mathbb{R})$ అవిచ్ఛిన్న బిందువులను కనుగొనుము.

6. Test the differentiability of the function $f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right),\ x\neq 0$

$f(x)=0,\ x=0$

$f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right),\ x\neq 0,\ f(x)=0,\ x=0$ ప్రమేయం యొక్క అవకలనీయతను పరీక్షించండి.

7. Verify Rolle's theorem for $f(x)=\cos x$ in $[\pi, 5\pi]$

$f(x)=\cos x$ in $[\pi, 5\pi]$ ప్రమేయముకు రోలె సిద్ధాంతమును పరిశీలించండి.

8. If $f(x)=x$ on $[0, 1]$ and $P=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right\}$ find U(p.f) and L(p.f).

$[0, 1]$ మీద $f(x)=x$ ప్రమేయాన్ని ఒక విభజన $P=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right\}$ అయితే L(p,f), U(p,f) కనుక్కోండి.

Part - B

విభాగము - B

Answer **All** questions. Each question carries **10** Marks. **(5 × 10 = 50)**

క్రింది ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానాలు ఇవ్వండి. ఒక్కొక్క ప్రశ్నకు పది మార్కులు.

9. a) State and prove cauchy convergence criterion.

కోషి అనుక్రమం అభిసరణతను నిర్ణయించే నియమాన్ని ప్రవచించి నిరూపించుము.

OR

b) Establish the convergence and find the limits of

i) $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$ ii) $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$

ప్రమేయాల యొక్క అభిసరణతను పరీక్షించి, అవధులను కనుక్కోండి.

10. a) Test the convergence of the series $\sum \frac{x^{2n-2}}{(n+1)\sqrt{n}}$.

$\sum \frac{x^{2n-2}}{(n+1)\sqrt{n}}$ శ్రేణి యొక్క అభిసరణతను పరీక్షించండి.

OR

b) Define absolute and conditional convergent and Test the series $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \ldots\ldots$

సంపూర్ణాభిసరణం మరియు నియతాభిసరణం నిర్వచించండి మరియు $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \ldots\ldots$ శ్రేణి అభిసరణతను పరీక్షించండి.

11. a) Examine the continuity of the function $f(x) = |x| + |x-1|$ at $x = 0,1$.

$x = 0,1$ ల వద్ద $f(x) = |x| + |x-1|$ గా నిర్వచింపబడిన ప్రమేయము యొక్క అవిచ్ఛిన్నతను పరీక్షించండి.

OR

b) If $f(x)$ is continuous on [a, b], then prove that $f(x)$ is uniformly continuous on [a, b].

[a, b] మీద f ప్రమేయము అవిచ్ఛిన్నమయితే, అపుడు అది [a, b] మీద ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నమని నిరూపించండి.

12. a) State and prove Lagranges mean value Theorem.

లెగ్రాంజి మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతమును ప్రవచించి నిరూపించుము.

OR

b) If a < b, prove that $\frac{b-a}{1+b^2} < \left(\tan^{-1} b - \tan^{-1} a\right) < \frac{b-a}{1+a^2}$, hence deduce $\frac{5\pi+4}{20} < \tan^{-1} 2 < \frac{\pi+2}{4}$.

a < b అయితే $\frac{b-a}{1+b^2} < \left(\tan^{-1} b - \tan^{-1} a\right) < \frac{b-a}{1+a^2}$, అని నిరూపించండి తద్వారా $\frac{5\pi+4}{20} < \tan^{-1} 2 < \frac{\pi+2}{4}$ అని చూపండి.

13. a) If $f \in R\,[a, b]$ and m, M are the infimum and supremum of f on [a,b,] then,

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

$f \in R\,[a, b]$ మరియు [a, b] మీద f యొక్క గరిష్ఠ దిగువ హద్దు మరియు కనిష్ఠ ఎగువ హద్దులు m, M

లైతే $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$ అని నిరూపించండి.

OR

b) Prove that $f(x) = x^2$ in integrable on [0, a] and hence show that $\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}$.

[0, a] మీద $f(x) = x^2$ సమాకలనీయమని మరియు $\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}$ అని నిరూపించుము.

❁❁❁